Miejsce na identyfikację szkoły

ARKUSZ PRÓBNEJ MATURY
Z OPERONEM
MATEMATYKA

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy: 180 minut

LISTOPAD 2013

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 14 stron (zadania 1.–12.). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zapisz w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań rachunkowych przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
6. Zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
7. Obok numeru każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów możliwych do uzyskania.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.

Życzymy powodzenia!

Za rozwiązanie wszystkich zadań można otrzymać łącznie **50 punktów**.

Wpisujące zdający przed rozpoczęciem pracy

PESEL ZDAJĄCEGO

KOD ZDAJĄCEGO

Zadanie 1. (*4 pkt*)

Wykaż, że dla dowolnej wartości parametru m równanie: $-x^2+\left(2m^2+3\right)x-m^4-1=0$ ma dwa różne pierwiastki dodatnie.

Odpowiedź: ....

Zadanie 2. (*5 pkt*)

Narysuj wykres funkcji: $f(x)=\begin{cases}-2^{x+1}+2, & \text{dla } x\le 0\\ -|x-4|+4, & \text{dla } x>0\end{cases}.$

Określ liczbę rozwiązań równania $|f(x)|=m$ w zależności od parametru m.

Odpowiedź: ....

Zadanie 3. (*4 pkt*)

O wielomianie $W(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ wiadomo, że liczba 1 jest jego pierwiastkiem dwukrotnym oraz że $W(x)$ jest podzielny przez dwumian $x+2$. Oblicz współczynniki a, b, c. Dla obliczonych wartości a, b, c rozwiąż nierówność $W(x+1)<0$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 4. (*3 pkt*)

Liczby a, b, k są całkowite i k jest różna od zera. Wykaż, że jeśli liczby $a+b$ oraz $a \cdot b$ są podzielne przez k, to liczba $a^3 - b^3$ też jest podzielna przez k.

Odpowiedź: ....

Zadanie 5. (*4 pkt*)

Określ dziedzinę funkcji: $f(x)=\sqrt{\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right)}$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 6. (*5 pkt*)

Wiedząc, że ciąg (a_n) jest ciągiem arytmetycznym oraz wyraz ogólny ciągu (b_n) określony jest wzorem $b_n = 5^{a_n}$, wykaż, że ciąg (b_n) jest ciągiem geometrycznym. Wyznacz, w zależności od n, iloczyn $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n$, przyjmując, że pierwszy wyraz ciągu (a_n) jest równy 1, a jego różnica jest równa 3.

Odpowiedź: ....

Zadanie 7. (*5 pkt*)

Rozwiąż równanie: $\sin x|\cos x| = 0,25$, gdzie $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Odpowiedź: ....

Zadanie 8. (*4 pkt*)

Okrąg o środku A i promieniu długości r jest styczny zewnętrznie do okręgu o środku B i promieniu długości $R\left(R>r\right)$. Prosta k jest styczna jednocześnie do obu okręgów i tworzy z prostą AB kąt ostry α. Wyznacz $\sin\alpha$ w zależności od r i R.

Odpowiedź: ....

Zadanie 9. (*4 pkt*)

W trójkącie ABC punkty $K=(2,2)$, $L=(-2,1)$, i $M=(-1,-1)$ są odpowiednio środkami boków AB, BC, AC. Wyznacz współrzędne wierzchołków trójkąta $A'B'C'$, który jest obrazem trójkąta ABC w symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych.

Odpowiedź: ....

Zadanie 10. (*4 pkt*)

W trójkącie ABC kąt przy wierzchołku B jest ostry, długość promienia okręgu opisanego na tym trójkącie jest równa 5 oraz $|AC| = 6$, $|AB| = 10$. Na boku BC wybrano taki punkt K, że $|BK| = 2$. Oblicz długość odcinka AK.

Odpowiedź: ....

Zadanie 11. (*4 pkt*)

W zielonym pudełku jest 10 monet pięciozłotowych i 5 monet dwuzłotowych, a w białym pudełku są 2 monety pięciozłotowe i 3 monety dwuzłotowe. Z zielonego pudełka losujemy jedną monetę i wrzucamy ją do białego pudełka. Następnie z białego pudełka losujemy jednocześnie 2 monety. Oblicz prawdopodobieństwo, że z białego pudełka wylosujemy w sumie 7 złotych.

Odpowiedź: ....

Zadanie 12. (*4 pkt*)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość a. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i wierzchołek ostrosłupa. Płaszczyzna tego przekroju tworzy z płaszczyzną podstawy kąt o mierze α. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedź: ....

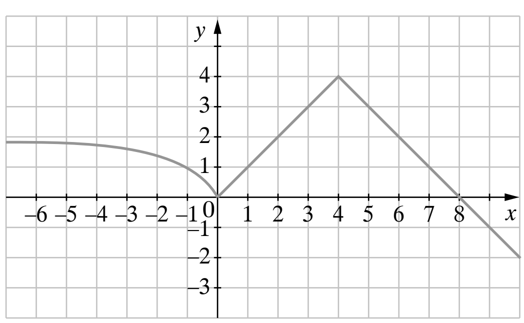
BRUDNOPIS (*nie podlega ocenie*)

KRYTERIA OCENIANIA ODPOWIEDZI
Próbna Matura z OPERONEM

Matematyka
Poziom rozszerzony

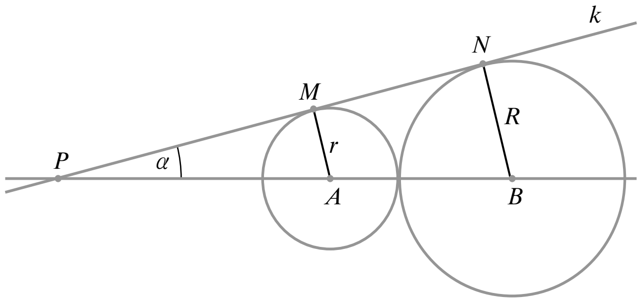
Listopad 2013

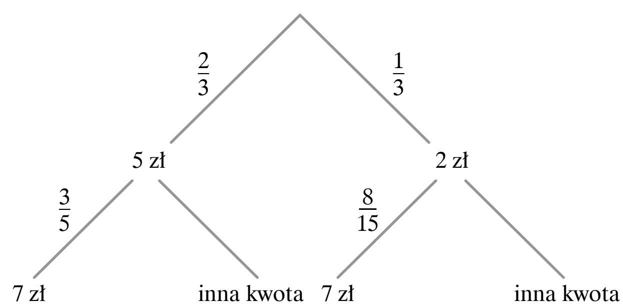
W niniejszym schemacie oceniania zadań otwartych są prezentowane przykładowe poprawne odpowiedzi. W tego typu zadaniach należy również uznać odpowiedzi ucznia, jeśli są inaczej sformułowane, ale ich sens jest zgodny z podanym schematem, oraz inne poprawne odpowiedzi w nim nieprzewidziane.

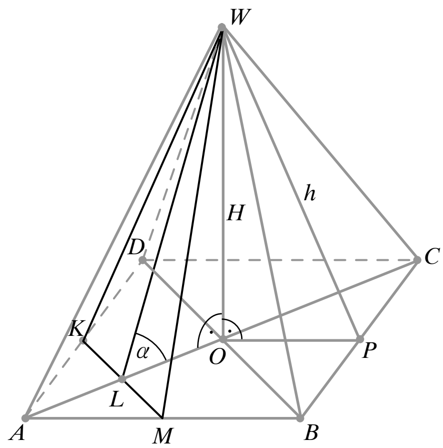
Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
1.	Postęp: zapisanie tylko warunków: $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie warunków: $\Delta > 0$ i $x_1 \cdot x_2 > 0$ i $x_1 + x_2 > 0$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie wzorów Viete'a i wyznaczenie: $\Delta = 12m^2 + 5$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zauważenie, że wszystkie warunki $\Delta = 12m^2 + 5 > 0$, $x_1 \cdot x_2 = m^4 + 1 > 0$, $x_1 + x_2 = 2m^2 + 3 > 0$ zachodzą dla $m \in R$	**4 pkt**
2.	Istotny postęp: poprawne narysowanie każdej części wykresu, niekoniecznie uwzględniając dziedzinę	2 pkt (po 1 pkt za każdą część)
	Pokonanie zasadniczych trudności: sporządzenie całego wykresu funkcji $y = f(x)$ 	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie 0 rozwiązań dla $m \in (-\infty, 0)$, 1 rozwiąznie dla $m \in (4, +\infty)$, 2 rozwiązania dla $m \in \{0, 4\}$, 3 rozwiązania dla $m \in \langle 2, 4)$, 4 rozwiązania dla $m \in (0, 2)$.	**5 pkt** (4 pkt, jeśli popełniono jeden błąd)

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
3.	Postęp: zapisanie: $W(x)=2(x-1)^2(x+2)$	1 pkt
	Istotny postęp: uporządkowanie postaci iloczynowej i porównanie: $2x^3+ax^2+bx+c=2x^3-6x+4$ wyznaczenie: $a=0$, $b=-6$, $c=4$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie wielomianu: $W(x+1)=2x^3+6x^2$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie nierówności i zapisanie zbioru rozwiązań: $(-\infty,-3)$	**4 pkt**
4.	Postęp: zapisanie: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: przekształcenie drugiego czynnika: $a^3-b^3=(a-b)\left((a+b)^2-ab\right)$	2 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: stwierdzenie na podstawie założenia, że jeżeli liczby $(a+b)^2$ i ab są podzielne przez k, to ich różnica jest podzielna przez k oraz $a-b$ jest liczbą całkowitą lub zapisanie: $a^3-b^3=(a-b)\left((a+b)^2-ab\right)=(a-b)(k^2p^2-kq)=k(a-b)(kp^2-q)$, gdzie p i q są liczbami całkowitymi oraz $a-b$ i kp^2-q są liczbami całkowitymi	**3 pkt**
5.	Postęp: zapisanie warunków: $\begin{cases}(1)\ x+1>0\\(2)\ \log_{\frac{1}{3}}(x+1)>0\\(3)\ \log_2\left\lvert\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\right\rvert\ge 0\end{cases}$	1 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie jednego z warunków (2) lub (3) (2) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)>\log_{\frac{1}{3}}1\Leftrightarrow 0<x+1<1\Leftrightarrow -1<x<0$ (3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1)\ge 1\Leftrightarrow 0<x+1\le\frac{1}{3}\Leftrightarrow -1<x\le-\frac{2}{3}$	3 pkt (2 pkt, jeśli rozwiązano jeden warunek)
	Rozwiązanie bezbłędne: rozwiązanie układu wszystkich warunków $\begin{cases}x>-1\\-1<x<0\\-1<x\le-\frac{2}{3}\end{cases}$ i zapisanie: $D=\left(-1,-\frac{2}{3}\right\rangle$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
6.	Istotny postęp: zapisanie: $b_{n+1} = 5^{a_{n+1}} = 5^{a_n + r} = 5^{a_n} \cdot 5^r = b_n \cdot 5^r$, $n \in N_+$ i 5^r – liczba	2 pkt (1 pkt, jeśli niewyjaśniono, że 5^r jest liczbą)
	Pokonanie zasadniczych trudności: zapisanie: $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n = 5^{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: zastosowanie wzorów na n-tą sumę częściową	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_n = 5^{\frac{3n^2 - n}{2}}$	**5 pkt**
7.	Postęp: zapisanie alternatywy układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ 2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ -2\sin x \cos x = \frac{1}{2} \end{cases}$	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie wzoru na $\sin 2x$ $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ -\sin 2x = \frac{1}{2} \end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie równań dla $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$: $\sin 2x = \frac{1}{2}$ $x = \frac{\pi}{12}$ lub $x = \frac{5\pi}{12}$, lub $x = \frac{13\pi}{12}$, lub $x = \frac{17\pi}{12}$ $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ $x = \frac{7\pi}{12}$ lub $x = \frac{11\pi}{12}$, lub $x = \frac{19\pi}{12}$, lub $x = \frac{23\pi}{12}$	3 pkt
	Rozwiązanie prawie całkowite: poprawne rozwiązanie każdego z układów: $\begin{cases} \cos x \geq 0 \\ x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \right\} \end{cases}$ lub $\begin{cases} \cos x < 0 \\ x \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\} \end{cases}$ $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \right\}$ lub $x \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$	4 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: zapisanie rozwiązania $x \in \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$	**5 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
8.	Postęp: wykonanie rysunku  lub opis oznaczeń: P – punkt przecięcia prostej k z prostą AB M – punkt styczności $o(A, r)$ z prostą k N – punkt styczności $o(B, R)$ z prostą k	1 pkt
	Istotny postęp: zastosowanie twierdzenia Talesa: $\frac{\lvert BN\rvert}{\lvert BP\rvert}=\frac{\lvert AM\rvert}{\lvert AP\rvert}$, $\frac{R}{R+r+a}=\frac{r}{a}$, gdzie $\lvert AP\rvert=a$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie $\lvert AP\rvert=a=\frac{(R+r)r}{R-r}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie z trójkąta AMP: $\sin\alpha=\frac{r}{\lvert AP\rvert}=\frac{R-r}{R+r}$	**4 pkt**
9.	Postęp: oznaczenie wierzchołków trójkąta: $A=(x_A, y_A)$, $B=(x_B, y_B)$, $C=(x_C, y_C)$ i wykorzystanie wzoru na współrzędne środka odcinka: $K=\left(\frac{x_A+x_B}{2}, \frac{y_A+y_B}{2}\right)$, $L=\left(\frac{x_B+x_C}{2}, \frac{y_B+y_C}{2}\right)$ i $M=\left(\frac{x_A+x_C}{2}, \frac{y_A+y_C}{2}\right)$	1 pkt
	Istotny postęp: zapisanie odpowiednich układów równań: $\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{2}=2\\ \frac{x_B+x_C}{2}=-2\\ \frac{x_A+x_C}{2}=-1\end{cases}$ i $\begin{cases}\frac{y_A+y_B}{2}=2\\ \frac{y_B+y_C}{2}=1\\ \frac{y_A+y_C}{2}=-1\end{cases}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: rozwiązanie układów równań i zapisanie współrzędnych punktów: $A=(3, 0)$, $B=(1, 4)$, $C=(-5, -2)$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie obrazów punktów A, B, C symetrii środkowej względem początku układu współrzędnych $A'=(-3, 0)$, $B'=(-1, -4)$, $C'=(5, 2)$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
10.	Postęp: zastosowanie twierdzenia sinusów do trójkąta *ABC* i obliczenie $\sin(\sphericalangle ABC)=\frac{3}{5}$	1 pkt
	Istotny potęp: obliczenie $\cos(\sphericalangle ABC)=\frac{4}{5}$, $\sphericalangle ABC$ – kąt ostry	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: zastosowanie twierdzenia cosinusów do trójkąta *ABK* $\lvert AK\rvert^2=10^2+2^2-2\cdot 2\cdot 10\cdot\frac{4}{5}$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie $\lvert AK\rvert=6\sqrt{2}$	**4 pkt**
11.	Postęp: obliczenie prawdopodobieństwa wylosowania z zielonego pudełka 5 zł oraz 2 zł $P(B_1)=\frac{2}{3}$ $P(B_2)=\frac{1}{3}$	1 pkt
	Istotny postęp: obliczenie prawdopodobieństw przy losowaniu z białego pudełka $p_1=\frac{\binom{3}{1}\binom{3}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{3}{5}$ $p_2=\frac{\binom{2}{1}\binom{4}{1}}{\binom{6}{2}}=\frac{8}{15}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: narysowanie drzewka i podpisanie odpowiednich gałęzi  Uwaga: Jeżeli uczeń od razu narysował drzewko odpowiadające opisanej w zadaniu sytuacji i poprawnie wpisał prawdopodobieństwa na potrzebnych gałęziach, to również otrzymuje 3 pkt.	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: obliczenie: $\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{15}=\frac{26}{45}$	**4 pkt**

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
12.	Postęp: sporządzenie poprawnego rysunku z oznaczeniami: OW – wysokość bryły, LW – wysokość trójkąta powstałego w przekroju  lub opisanie oznaczeń bez rysunku i wyjaśnienie, że kąt α jest wyznaczony przez wysokość przekroju i przekątną podstawy	1 pkt
	Istotny postęp: wyznaczenie długości odcinka OL: $\lvert OL\rvert = \frac{a\sqrt{2}}{4}$	2 pkt
	Pokonanie zasadniczych trudności: wyznaczenie z trójkąta OLW długości wysokości ostrosłupa: $H = \lvert OW\rvert = \frac{a\sqrt{2}}{4}\cdot \mathrm{tg}\alpha$	3 pkt
	Rozwiązanie bezbłędne: wyznaczenie objętości ostrosłupa: $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}\mathrm{tg}\alpha$	**4 pkt**